PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

On utilisera, dans l'espace affine euclidien orienté de dimension 3, un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Un point M de cet espace sera défini, soit par le système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) associé à ce repère, soit par un système de coordonnées semi-polaires (r, θ, z) associé à ce même repère.

D'autre part, on désigne par $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ le repère qui se déduit de $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par rotation d'angle θ autour de l'axe $(O ; \vec{k})$.

Dans ce problème, plusieurs grandeurs, exprimées en fonction de (x, y), contiennent l'expression $\sqrt{x^2 + y^2}$. Elle sera systématiquement remplacée par r, afin d'alléger l'écriture. Les éventuels calculs de dérivées se feront ensuite en utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées.

Soit D le complémentaire de l'ensemble des points tels que $x = y = 0$. On définit dans D le champ scalaire U et le champ vectoriel $\vec{E}$ par les égalités

$$U(M) = \frac{xy}{r^4}, \qquad \vec{E}(M) = \overrightarrow{\text{grad}}\ U(M).$$

1° Exprimer $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et des lignes trigonométriques de θ.

2° Exprimer les composantes E_x, E_y, E_z de $\vec{E}(M)$, relatives à la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, en fonction de x, y et r.

3° Exprimer les composantes E_u, E_v, E_z de $\vec{E}(M)$, relatives à la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$, en fonction de r et θ.

4° Calculer la norme de $\vec{E}(M)$.

5° Calculer la divergence du champ vectoriel $\vec{E}(M)$.

6° Quelle est l'équation, en coordonnées polaires (r, θ), de l'intersection Γ_λ du plan d'équation $(z = 0)$ et de la surface définie par l'équation $U(M) = \lambda$, dans laquelle λ désigne une constante ? Préciser les propriétés de symétrie de Γ_λ. Par quelle transformation géométrique $\Gamma_{-\lambda}$ se déduit-elle de Γ_λ ? Tracer les courbes Γ_1, Γ_{-1}, Γ_4 et Γ_{-4}.

7° *a.* Déterminer, dans le plan d'équation $(z = 0)$, les trajectoires orthogonales de la famille des courbes Γ_λ. L'équation de ces trajectoires sera donnée en coordonnées polaires. On rappelle que, par définition, si l'une de ces trajectoires orthogonales passe en un point M, elle est, en ce point, orthogonale à la courbe Γ_λ qui passe en M.

b. Par quelle transformation géométrique la famille de ces trajectoires orthogonales se déduit-elle de la famille des courbes Γ_λ ?

8° Soit α un nombre réel strictement positif. Parmi les trajectoires orthogonales trouvées à la question précédente, on considère celle qui passe par le point ayant pour coordonnées polaires $r = \alpha$, $\theta = 0$. On désigne par C la partie de cette courbe correspondant aux valeurs de θ telles que $-\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$. Montrer que C est une partie d'une lemniscate de Bernoulli ayant, par définition, pour équation $r = \alpha\sqrt{\cos 2\theta}$. Exprimer en fonction de α l'aire du domaine entouré par C, dans le plan $(z = 0)$.

9° Exprimer en fonction de α l'aire de la surface de révolution S engendrée par la courbe C tournant autour de Ox.

10° Une masse m est répartie sur la surface S avec une densité superficielle uniforme. Déterminer le centre d'inertie de cette répartition de masse.

Tournez la page S. V. P.

11° Exprimer, en fonction de m et de α, le moment d'inertie, par rapport à Ox, de la répartition de masse définie à la question précédente.

12° Soit a et R deux nombres réels tels que :

$$0 < a < R$$

Soit Δ le domaine défini par les inégalités :

$$x \geqslant 0 , \qquad y \geqslant a , \qquad 0 \leqslant z \leqslant a , \qquad r \leqslant R .$$

On considère l'intégrale de volume :

$$\iiint_{\Delta} \|\vec{E}\|^2 \, dv$$

Vers quelle limite tend-elle lorsque, a étant fixé, R tend vers l'infini ?

13° Soit I, A, B, C les points ayant respectivement pour coordonnées cartésiennes (prises dans l'ordre (x, y, z)) :

$$(a, 0, 0) , \qquad (a, a, 0) , \qquad (a, 0, a) , \qquad (a, a, a)$$

a est encore une constante strictement positive. Soit K le carré dont les sommets sont les points I, A, B, C. Soit $\vec{n}$ le vecteur normal unitaire du plan $(x = a)$, orienté dans le sens positif de l'axe Ox. Le flux du champ vectoriel $\vec{E}$ (M) à travers le carré K est par définition l'intégrale de surface :

$$\iint_{K} \vec{E}(M) \cdot \vec{n} \, dS$$

Calculer ce flux.

14° Calculer l'intégrale de surface :

$$\iint_{K'} \vec{E}(M) \cdot \vec{n} \, dS ,$$

flux du champ vectoriel $\vec{E}$ (M) à travers le triangle K' dont les sommets sont les points I, A, B.

15° Soit $\vec{V}$ un champ vectoriel défini par l'égalité :

$$\vec{V}(M) = xyf(r)\,\vec{u} ,$$

$f(r)$ étant une fonction continue et au moins une fois dérivable, sauf peut-être pour $x = y = 0$.

Montrer que, pour que le champ $\vec{V}$ (M) vérifie l'équation :

$$\operatorname{div} \vec{V}(M) = U(M) ,$$

il faut et il suffit que la fonction $f(r)$ vérifie une certaine équation différentielle que l'on déterminera. Donner la solution générale de cette équation différentielle.